



TITLE:

# 線形計画法と組合せ最適化(トーリック多様体の幾何と凸多面体)

AUTHOR(S):

田村, 明久

---

CITATION:

田村, 明久. 線形計画法と組合せ最適化(トーリック多様体の幾何と凸多面体). 数理解析研究所講究録 1996, 934: 124-148

ISSUE DATE:

1996-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60002>

RIGHT:

## 線形計画法と組合せ最適化

電気通信大学 田村 明久 (Akihisa Tamura)

### 1 はじめに

線形計画問題は、不等式表現された凸多面体上で与えられた線形関数を最大化（あるいは最小化）する問題である。線形計画法とは、線形計画問題を解くための最適化技法などを研究する応用数学の一分野であり、線形計画問題が生産、運搬、金融など多くの分野で使われる最も重要な問題であるため今なお研究されている。本稿の第一の目的は、この線形計画法を概説することである。内容としては、線形計画問題に関する基本用語、最もよく知られた解法の一つであるシンプレックス法、双対定理、相補性定理、基本定理などの諸性質、Farkas の補題と双対定理の関係などを紹介する。線形計画問題の解法としてシンプレックス法を概説するが、これ以外にも多くの方法が提案されている。これらは大きく分けて、シンプレックス法のようなピボット演算を繰り返す方法、楕円体法、内点法、計算幾何的アプローチがある。ここではシンプレックス法以外の解説は省略するが、計算幾何的アプローチについては [17] が、楕円体法、内点法、他のピボット演算法については [20] が良い参考書となる。

組合せ最適化問題（最大化問題とする）の多くは整数計画問題（与えられた有限個の不等式を満たす整数座標点の中で与えられた線形関数を最大化するものを求める問題）として定式化されるが、整数条件を外した線形計画問題を解くことにより元々の組合せ最適化問題の最適値の上界を得ることができる。このように、組合せ最適化問題を実際に解きたい場合に線形計画問題やその解法が利用されるが、線形計画法と組合せ最適化はより密接な関係を持っている。例えば、双対定理を用いることである種の組合せ的な性質を導くことができ、さらに完全単模行列 (totally unimodular matrix) などの性質を併用すればよく知られた König の定理「2 部グラフの最大マッチングと最小頂点被覆の大きさは等しい」などが導ける。本稿の第二の目的は、幾つかの組合せ的定理が双対定理や行列の完全単模性などから導けることを紹介することである。

第4節では、線形計画法に関連した話題として有向マトロイド計画問題と半正定値計画問題について簡単に触れる。

### 2 線形計画法

この節では、線形計画問題、シンプレックス法、基本定理、双対定理など線形計画法の基本理論を簡単に紹介する。説明は必要最小限にとどめるので、線形計画法をより詳しく知りたい読者の方は、[8, 9, 18, 20]などを参照されたい。

#### 2.1 線形計画問題

線形計画問題 (linear programming problem) とは、有限個の線形制約式の下で線形関数を最大（または最小）にする問題である。ここではその中でも特殊な形をした基準形 (canonical form) と呼ばれる問題を考える。基準形の線形計画問題とは、与えられた  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$

に対して、 $Ax \leq b$ ,  $x \geq 0$  を満たす  $x \in \mathbb{R}^n$  の中で線形関数  $c^T x$  を最大化するものを求める問題であり、一般に

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

などと書く。ただし  $\mathbb{R}$  は実数全体の集合を表し、 $c^T$  は  $c$  の転置を表す。ここで  $Ax \leq b$  と  $x \geq 0$  は線形計画問題の制約条件 (constraints) と呼ばれ、関数  $c^T x$  は、目的関数 (objective function) と呼ばれている。どのような線形計画問題も「目的関数や制約式を  $-1$  倍する」と「任意の実数は二つの非負実数の差で表せる」を使うことにより基準形に変形できるので、理論的にはこの基準形の線形計画問題を扱うだけで充分である。例えば、以下のような問題が基準形である。

例 2.1:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && 2x_1 + x_2 + x_3 \\ & \text{subject to} && 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4 \\ & && 2x_1 + 4x_3 \leq 4 \\ & && -4x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 1 \\ & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

実ベクトル  $x$  が制約条件をすべて満足するとき、それを**実行可能解** (feasible solution) と呼ぶ。例えば、例 2.1 では  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ ,  $(2, 0, 0)$  はいずれも実行可能解である。実行可能解全体は**実行可能領域** (feasible region) と呼ばれている。実行可能解の中で目的関数を最大化 (最小化問題では最小化) するものは、**最適解** (optimal solution) と呼ばれている。後に示すが、 $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 0)$  は例 2.1 の最適解となっている。

線形計画問題の中には、実行可能解を持たないものがあり、例えば問題:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && x_1 + 5x_2 \\ & \text{subject to} && x_1 + x_2 \geq 5 \\ & && -x_1 - x_2 \geq -2 \end{aligned}$$

は、実行可能解を持たない。このような問題を**実行不可能** (infeasible) な問題と呼び、それ以外の問題を**実行可能** (feasible) な問題と呼ぶ。当然のことながら、実行不可能な問題には最適解は存在しない。

それでは実行可能な問題は、常に最適解を持つであろうか。次の問題を見てみよう:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && 3x_1 - x_2 \\ & \text{subject to} && -x_1 + x_2 \leq 6 \\ & && -x_1 - 2x_2 \leq -4 \end{aligned}$$

この問題では、任意の  $x_2$  の値に対し  $x_1$  の値を十分大きく取ることにより実行可能解を得ることが出来る。そして目的関数値は  $x_1 \rightarrow \infty$  に従い無限大に発散してしまう。一般に、任意の実数  $M$  に対し目的関数値  $> M$  (最小化問題では  $< M$ ) となるように実行可能解が取れるとき、その線形計画問題は**非有界** (unbounded) であるといい、それ以外の問題は**有界** (bounded) であるという。もちろん非有界な問題には最適解は存在しない。

以上から、線形計画問題が最適解を持つためには、問題が実行可能でかつ有界であることが必要条件となる。線形計画法における最も基本的な定理はこの逆も正しいことを主張している。

**定理 2.1 (基本定理)：** 実行可能で有界な線形計画問題は最適解を持つ。

線形計画問題は凸な領域で線形関数を最大化する問題なので、解の最適性や問題の非有界性は、以下のような局所的な条件として書けることを注意しておく。実行可能解  $\mathbf{x}$  に対して、十分小さな正数  $\varepsilon$  が存在して  $\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{z}$  が実行可能解であるとき、 $\mathbf{z}$  を  $\mathbf{x}$  での**実行可能方向** (feasible direction) と呼ぶ。実行可能解  $\mathbf{x}^*$  が最適解である必要十分条件は、 $\mathbf{c}^T \mathbf{z} > 0$  となる  $\mathbf{x}$  での実行可能方向  $\mathbf{z}$  が存在しないことである。また、問題が非有界であるための必要十分条件は、問題が実行可能であって、 $A\mathbf{z} \leq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$  かつ  $\mathbf{c}^T \mathbf{z} > 0$  を満たすベクトル  $\mathbf{z}$  が存在することである。

## 2.2 シンプレックス法

ここでは簡単な線形計画問題の例を取り上げ、線形計画問題を解くための解法：シンプレックス法を説明する。また、簡単のために、対象とする問題は  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  であるような、すなわち原点が実行可能解となる基準形の問題に限る。

それでは実際に問題例 2.1 を解いてみる。この問題をシンプレックス法で解くには、**スラック変数** (slack variable) と呼ばれる変数  $x_4, x_5, x_6$  を導入して問題の制約式を等式とし、さらに目的関数を  $z = 2x_1 + x_2 + x_3$  と置き、以下のような問題

$$\begin{aligned}
 &\text{maximize} && z \\
 &\text{subject to} && x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
 & && x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3 \\
 & && x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3 \\
 & && z = 0 + 2x_1 + x_2 + x_3 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

を作る。2つの問題 (2.1) と (2.2) は一方の解から他方の解が簡単に構成でき、その目的関数値は一致するという意味で同値である。さて問題 (2.2) の等式制約に注目しよう。 $z$  を最大化し  $x_i$  にはすべて非負制約があることを暗黙の約束と思えば、この問題を記述するには等式制約の情報だけで充分である。この等式制約の部分は**辞書** (dictionary) と呼ばれている。ここでは、簡単のために辞書を以下のような係数の表を使って表すことにする。

		$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x_4$	4	-2	-2	1
$x_5$	4	-2	0	-4
$x_6$	1	4	-3	1
$z$	0	2	1	1

(2.3)

辞書において、左辺にある変数を**基底変数** (basic variable) といい、基底変数以外の変数を**非基底変数** (nonbasic variable) という。明らかに、非基底変数  $x_1, x_2, x_3$  の値を任意に定めると、残りの変数（つまり基底変数  $x_4, x_5, x_6, z$ ）の値が一意に定まる。特に非基底変数をすべて 0 に固定して得られる解：

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, z) = (0, 0, 0, 4, 4, 1, 0) \tag{2.4}$$

はこの辞書の基底解 (basic solution) と呼ばれている。この場合基底解において  $x_i$  の値がすべて非負なのでこの基底解は実行可能解であり、対応する目的関数値  $z$  は 0 である。また基底解が実行可能となる辞書を実行可能 (feasible) と呼ぶ。

この実行可能解から目的関数が増加するように解を改善することを考える。基底解では非基底変数  $x_1, x_2, x_3$  を 0 に固定していたが、いま変数  $x_1$  だけを増加させてみる。このとき基底変数の値は

$$\begin{array}{ll} x_1 = 1 \text{ の場合} & x_4 = 2, \quad x_5 = 2, \quad x_6 = 5, \quad z = 2 \quad \text{—— 実行可能} \\ x_1 = 3 \text{ の場合} & x_4 = -2, \quad x_5 = -2, \quad x_6 = 13, \quad z = 6 \quad \text{—— 実行不可能} \end{array}$$

のようになる。このことから明らかだと思うが、変数  $x_1$  を増加させればさせる程、目的関数  $z$  の値は増加する。これは、 $z$  に対応する行の  $x_1$  の係数 (= 2) が正であることによる。断っておくが、この意味で  $x_1$  の代わりに  $x_2$  や  $x_3$  を単独で増加させる変数として選んでもよい。さて、 $x_1$  の増加によって  $z$  は増加したが  $x_1$  を増加させ過ぎると基底変数の非負性を保つことができなくなる。この場合、 $x_4$  と  $x_5$  の非負性を保つために  $x_1$  は 2 まではしか増加させることができない。よって

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, z) = (2, 0, 0, 0, 0, 9, 4) \quad (2.5)$$

が  $x_1$  を単独に増加させて得られる最も良い実行可能解となる。新しい実行可能解では  $x_1 > 0$ ,  $x_4 = x_5 = 0$  となっていて、最初の実行可能解 (2.4) と比較して変数  $x_1$  と  $x_4$  (または  $x_5$ ) の役割が入れ替わっている。そこで、辞書の  $x_4$  の行を  $x_1$  について解き、これを使ってその他の行から  $x_1$  を消去して新しい辞書を構成する。このような演算を (4, 1) を中心としたピボット演算 (pivot operation) といい、この演算は辞書を満たす解集合を変えない。このようにして辞書 (2.3) は次のように更新される。

		$x_2$	$x_3$	$x_4$
$x_1$	2	-1	1/2	-1/2
$x_5$	0	2	-5	1
$x_6$	9	-7	3	-2
$z$	4	-1	2	-1

(2.6)

実行可能解 (2.5) は実は上の辞書 (2.6) の基底解となっている。辞書を満たす解集合が変わらないので、辞書 (2.6) と  $x_i$  の非負性のもとで  $z$  を最大化する問題は (2.2) と同値である。シンプレックス法は以上のように辞書を更新しながら (基底解を更新しながら) 目的関数値を改善していく方法である。

辞書 (2.6) に上の操作をもう一度適用してみる。この場合は非基底変数  $x_3$  と基底変数  $x_5$  が入れ替わり以下の辞書を得る。

		$x_2$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	2	-4/5	-2/5	-1/10
$x_3$	0	2/5	1/5	-1/5
$x_6$	9	-29/5	-7/5	-3/5
$z$	4	-1/5	-3/5	-2/5

(2.7)

辞書 (2.7) に対応する基底解は (2.5) と一致している。このように基底解が変化しないピボット演算を退化 (degenerate) しているといい、辞書 (2.3) から辞書 (2.6) への更新のように基底解が変化するピボット演算を非退化 (nondegenerate) と呼ぶ。辞書 (2.7) において解の改善を考えたとき、 $z$  の行に現れる非基底変数の係数は全て非正なのでこの実行可能解は上のような操作では改善できない。実は、このような状態になったとき現在の基底解が最適解であることが保証されている。すなわち、解 (2.5) は線形計画問題 (2.2) の最適解となっている。注意しておくが、辞書 (2.6) の段階では基底解が同じでもその解の最適性は保証されていない。

以上の操作をまとめるとシンプレックス法は以下のように記述される。記述の中には非有界性の判定があることに注意せよ。

---

### シンプレックス法

入 力: 実行可能辞書

Step1: (最適性判定)

- ・ 辞書の  $z$  の行で係数が正である変数  $x_s$  を一つ選ぶ。(非基底変数  $x_s$  の選択)
- ・ もしこのような非基底変数がなければ終了。(現在の基底解が最適解)

Step2: (非有界性判定)

- ・ 今の基底解から実行可能性を保ったまま  $x_s$  だけを出来る限り増加させる。  
つまり、 $(b_i, a_{is})$  は辞書の係数を表す)

$$b_r/|a_{rs}| = \min\{b_i/|a_{is}| \mid a_{is} < 0, 0 \leq i \leq m\}, \quad a_{rs} < 0 \quad (\text{比のテスト})$$

- ・ を満たす基底変数  $x_r$  を求める。(基底変数  $x_r$  の選択)
  - ・ このような  $x_r$  がなければ終了。(  $x_s$  を限りなく増加できるので非有界)
  - ・ 存在する場合は  $(r, s)$  を中心とするピボット演算を行ない辞書を更新し Step1 へもどる。
- 

### 2.3 巡回 (ピボット演算の無限ループ)

さて、シンプレックス法は実行可能な辞書を入力したときに必ず終了するのだろうか。実は、非基底変数や基底変数の選択において多数の候補がある場合不適当な選択を行うと終了しない場合がある。ここでは [13] よりその例を紹介する。

例 2.2:

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximize} & z \\
 \text{subject to} & x_4 = 0 - 2x_1 + x_2 - x_3 \\
 & x_5 = 0 - 3x_1 - x_2 - x_3 \\
 & x_6 = 0 + 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\
 & z = 0 + x_1 - 2x_2 + x_3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{array}$$

この問題の初期辞書は実行可能であり、前述のシンプレックス法が適用できる。そこで下ののように太字ところを中心としたピボット演算を繰り返してみる。

		$x_1$	$x_2$	$x_3$			$x_1$	$x_6$	$x_3$	
$x_4$	0	-2	1	-1	$\Leftarrow$	$x_4$	0	-1/3	-1/3	-1/3
$x_5$	0	<b>-3</b>	-1	-1		$x_5$	0	-14/3	1/3	-5/3
$x_6$	0	5	-3	2		$x_2$	0	5/3	<b>-1/3</b>	2/3
$z$	0	1	-2	1		$z$	0	-7/3	2/3	-1/3
$\Downarrow$						$\Uparrow$				
		$x_5$	$x_2$	$x_3$			$x_1$	$x_6$	$x_4$	
$x_4$	0	2/3	5/3	<b>-1/3</b>	$\Rightarrow$	$x_3$	0	-1	-1	<b>-3</b>
$x_1$	0	-1/3	-1/3	-1/3		$x_5$	0	-3	2	5
$x_6$	0	-5/3	-14/3	1/3		$x_2$	0	1	-1	-2
$z$	0	-1/3	-7/3	2/3		$z$	0	-2	1	1
$\Downarrow$						$\Uparrow$				
		$x_5$	$x_2$	$x_4$			$x_5$	$x_6$	$x_4$	
$x_3$	0	2	5	-3	$\Rightarrow$	$x_3$	0	1/3	-5/3	-14/3
$x_1$	0	-1	-2	1		$x_1$	0	<b>-1/3</b>	2/3	5/3
$x_6$	0	-1	<b>-3</b>	-1		$x_2$	0	-1/3	-1/3	-1/3
$z$	0	1	1	-2		$z$	0	2/3	-1/3	-7/3

以上のようにシンプレックス法が終了しない場合が存在する。このような現象は巡回 (cycling) と呼ばれている。では巡回が起こるのはどのような状況なのだろうか。「基底変数集合に対して行や列の入れ替えを無視すると辞書は一意に定まる」と「シンプレックス法は各繰り返しで目的関数が非減少である」という事実から巡回中では目的関数が一切増加しない。すなわち、すべてのピボット演算が退化していなければならない。事実この例でもそうになっている。このように退化は非常に厄介な現象で巡回などを引き起こす原因になる。では、巡回をどのように回避すれば良いのであろうか。その方法を次に紹介しよう。

## 2.4 最小添字規則

シンプレックス法では、非基底変数の選択（目的関数を増やす可能性があればどれでもよい）、基底変数の選択（比のテストで条件を満たせばどれでもよい）に自由度があった。ここで紹介する方法は、ピボットの選択をある規則で限定することにより、シンプレックス法の終了を保証するものである。他にもシンプレックス法の収束性を保証する方法はあるが、ここでは一番簡単にエレガントな最小添字規則を紹介する。

**最小添字規則 (smallest subscript rule):** シンプレックス法の各繰り返しで

- ・ Step 1 で非基底変数の候補が複数個あれば添字が最小のものを選ぶ；

- ・ Step 2 で基底変数の候補が複数個あれば添字が最小のものを選ぶ。

この規則は **Bland** のピボット選択規則 (Bland's pivot rule) と呼ばれ、次の定理が成り立つ。

**定理 2.2:** [4, 5] 最小添字規則を使えばシンプレックス法は必ず有限回で終了する。

この定理の証明はここでは省略する。最小添字規則を巡回を起こした線形計画問題 [例 2.2] に適用してみよう。初期辞書において、シンプレックス法では変数  $x_1$  と  $x_3$  が基底に入る候補であるが、最小添字規則では添字の小さい  $x_1$  が選ばれる。このとき、シンプレックス法では変数  $x_4$  と  $x_5$  が基底から出る候補となるが、最小添字規則では添字の小さい  $x_4$  が選ばれる。(4, 1) を中心とするピボット演算により

		$x_4$	$x_2$	$x_3$
$x_1$	0	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$
$x_5$	0	$3/2$	$-5/2$	$1/2$
$x_6$	0	$-5/2$	$-1/2$	$-1/2$
$z$	0	$-1/2$	$-3/2$	$1/2$

が得られる。次の反復では、非基底変数は  $x_3$  が一意に定まり、基底変数は  $x_1$  が選ばれ、ピボット演算により

		$x_4$	$x_2$	$x_1$
$x_3$	0	$-1$	$1$	$-2$
$x_5$	0	$1$	$-2$	$-1$
$x_6$	0	$-2$	$-1$	$1$
$z$	0	$-1$	$-1$	$-1$

が得られ、ここで最適性が満たされ終了する。

## 2.5 双対問題

以下では話を変えて線形計画法における双対性 (duality) について紹介する。双対性は線形計画理論において核となる基本的性質で、応用上も極めて重要である。まず手始めに双対問題を定義しよう。ここで、例 2.1 の問題

$$\begin{aligned}
 & \text{maximize} && 2x_1 + x_2 + x_3 \\
 & \text{subject to} && 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4 \\
 & && 2x_1 + 4x_3 \leq 4 \\
 & && -4x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 1 \\
 & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

をもう一度考える。前述のようにシンプレックス法を用いればこの問題は解けたわけだが、最適目的関数値がどの程度大きくなり得るかの予測をしてみよう。いま、問題 (2.8) の第 1 制約を  $\frac{1}{2}$  倍し第 2 制約の  $\frac{1}{2}$  倍と加えることにより不等式

$$2x_1 + x_2 + 1.5x_3 \leq 4$$



を得る。実行可能解は非負ベクトルであり、各  $x_i$  の係数の大小から

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2x_1 + x_2 + 1.5x_3 \leq 4$$

が得られ、4 が問題 (2.8) の最適目的関数値の上界となる。更に小さな上界を求めるために第 1、第 2、第 3 制約に非負の数  $y_1, y_2, y_3$  を掛けて足し合わせてみる：

$$(2y_1 + 2y_2 - 4y_3)x_1 + (2y_1 + 3y_3)x_2 + (-y_1 + 4y_2 - y_3)x_3 \leq 4y_1 + 4y_2 + y_3$$

このとき  $x_i$  の各係数が目的関数の係数以上であれば  $4y_1 + 4y_2 + y_3$  は最適目的関数値の上界となり、なるべく小さな上界を求める問題は次のような線形計画問題となる。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && 4y_1 + 4y_2 + y_3 \\ & \text{subject to} && 2y_1 + 2y_2 - 4y_3 \geq 2 \\ & && 2y_1 + 3y_3 \geq 1 \\ & && -y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 1 \\ & && y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

問題 (2.8) を行列  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  を使った基準形の線形計画問題

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b \\ & && x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

として書いてみると、問題 (2.9) は以下のような線形計画問題として書ける。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && b^T y \\ & \text{subject to} && A^T y \geq c \\ & && y \geq 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

一般に基準形の問題 (2.10) に対して、問題 (2.11) をその**双対問題** (dual problem) といい、(2.10) 自身を**主問題** (primal problem) などという。また、問題 (2.11) を基準形の問題に書き直し、その双対問題を作ってみると問題 (2.10) と同値な問題となる。すなわち、これらはお互いに双対の関係となっている。

## 2.6 双対定理

双対問題 (2.9) の作り方から明らかなように、次の性質が成り立つ。

**定理 2.3 (弱双対定理)：** 主問題 (2.10) と双対問題 (2.11) の任意の実行可能解  $x, y$  に対して、

$$c^T x \leq b^T y$$

が成り立つ。

**証明：**  $x, y$  をそれぞれ問題 (2.10) と (2.11) の実行可能解とすると：

$$\begin{aligned} c^T x &\leq (A^T y)^T x = y^T Ax && (A^T y \geq c, x \geq 0 \text{ より}) \\ &\leq b^T y && (Ax \leq b, y \geq 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

となる。 ■

さらにこの定理から次の2つの系が容易に導かれる。ここでは証明を省略する。

**系 2.4:** 主（双対）問題が非有界であれば、双対（主）問題は実行不可能である。

**系 2.5:** 主問題 (2.10) と双対問題 (2.11) のある実行可能解  $x, y$  に対して、もし目的関数値が一致すれば、すなわち  $c^T x = b^T y$  となれば、 $x, y$  はそれぞれの問題の最適解である。

このように、系 2.5 は線形計画問題の実行可能解が最適解であるための十分条件を与えている。次の定理はその逆も正しいことを主張している。

**定理 2.6 (双対定理):** 主（双対）問題に最適解が存在すれば、双対（主）問題にも最適解が存在し、それぞれの最適目的関数値は一致する。

ここではまず双対定理より導かれる二つの結果を紹介しよう。

**定理 2.7 (相補性定理):** 主問題 (2.10) と双対問題 (2.11) の実行可能解  $x, y$  がそれぞれの問題の最適解であるための必要十分条件は、次の相補性条件 (complementary slackness) が成り立つことである：

- (i)  $x_j = 0$     または     $c_j = A_j^T y$     (各  $j = 1, \dots, n$  について)    かつ
- (ii)  $A_i x = b_i$     または     $y_i = 0$     (各  $i = 1, \dots, m$  について)。

ただし、 $A_j, A_i$  はそれぞれ行列  $A$  の第  $j$  列と第  $i$  行を表すとする。

**証明:** それぞれの問題の実行可能解  $x, y$  が最適解であるための必要十分条件は、系 2.5 と双対定理より、目的関数値  $c^T x$  と  $b^T y$  が一致することである。弱双対定理の証明より、目的関数値が一致するための必要十分条件は

$$(A^T y - c)^T x = 0, \quad (b - Ax)^T y = 0$$

が成り立つことである。ここで、上の二つの等式とも  $x, y$  が実行可能解なら非負ベクトルの内積が 0 であることを主張しているので、これら二つの等式と相補性条件は同値である。 ■

**補題 2.8 (Farkas の補題):** 与えられた  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  に対して、次の一方のみが常に成り立つ。

- (1)  $Ax = b, x \geq 0$  である  $x \in \mathbb{R}^n$  が存在する。
- (2)  $A^T u \geq 0, b^T u < 0$  である  $u \in \mathbb{R}^m$  が存在する。

**証明:** 明らかに (1) と (2) の両方が同時に成り立つことはない。そこで (1) が成立しないときに (2) が成り立つことを示す。ここで、次のような線形計画問題

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && 0^T x \\ & \text{subject to} && Ax = b \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

とその双対問題

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \mathbf{b}^T \mathbf{u} \\ & \text{subject to} && A^T \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

を考える。(主問題を基準形に直しその双対問題が上の双対問題と同値になる。) ここで (1) が成立しないので主問題は実行不可能である。一方双対問題は  $\mathbf{0}$  が制約条件を満たすので実行可能である。 $\mathbf{b}^T \mathbf{u} < 0$  となる双対実行可能解が存在しないと仮定すると  $\mathbf{0}$  は最適解となる。しかし双対定理より主問題にも最適解が存在しなければならず、これは矛盾である。すなわち  $\mathbf{b}^T \mathbf{u} < 0$  となる双対実行可能解  $\mathbf{u}$  が存在し (2) が成り立つ。 ■

双対定理を用いない Farkas の補題の証明は [27, 28] などを参照されたい。

双対定理を証明する方法としては、シンプレックス法など線形計画問題を解くアルゴリズムを用いた構成的な方法などもあるが、ここでは上の Farkas の補題を用いて双対定理を証明する。すなわち双対定理と Farkas の補題は同値であることを示しておく。

**Farkas の補題を用いた双対定理の証明：**

ここでは、一般性を失うことなく主問題 (2.10) が最適解  $\mathbf{x}^*$  を持っているとする。ここで、次のような線形系

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}^T & \mathbf{0}^T & 1 \\ -A^T & I & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* \\ -\mathbf{c} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \\ v \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (2.12)$$

を満たす  $(\mathbf{y}, \mathbf{u}, v) \in \mathbb{R}^{m+n+1}$  が存在しないと仮定する。ただし  $I$  は  $n \times n$  単位行列を表す。Farkas の補題より

$$A\mathbf{z} \leq \mathbf{b}w, \quad (w, \mathbf{z}) \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}^T \mathbf{z} > (\mathbf{c}^T \mathbf{x}^*)w \quad (2.13)$$

を満たす  $(w, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  が存在する。もし  $w = 0$  とすると  $\mathbf{z}$  は  $A\mathbf{z} \leq \mathbf{0}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \mathbf{c}^T \mathbf{z} > 0$  を満たす。しかし任意の正数  $\lambda$  に対して、 $A(\mathbf{x}^* + \lambda\mathbf{z}) \leq \mathbf{b}, (\mathbf{x}^* + \lambda\mathbf{z}) \geq \mathbf{0}, \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T(\mathbf{x}^* + \lambda\mathbf{z})$  となり、 $\mathbf{x}^*$  が (2.10) の最適解であることに矛盾する。一方  $w > 0$  とすると  $\mathbf{z}/w$  が (2.10) の実行可能解で目的関数値が  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$  より大きくなり、 $\mathbf{x}^*$  の最適性に反する。よって (2.12) を満たす  $(\mathbf{y}, \mathbf{u}, v)$  が存在するが、この  $\mathbf{y}$  は

$$\mathbf{b}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*, \quad A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

を満たし、弱双対定理と系 2.5 より  $\mathbf{y}$  は問題 (2.11) の最適解となる。また目的関数値  $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$  は  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$  と一致する。 ■

最後に基本定理や双対定理、系 2.4 などをまとめると主問題と双対問題が満たす状態のうち可能な組合せは以下の表の○印のようになる。共に実行不可能であるような例は簡単に作れるので試して頂きたい。

		双 対 問 題		
主 問 題		最 適 解	非 有 界	実行不可能
	最 適 解	○	×	×
	非 有 界	×	×	○
	実行不可能	×	○	○

## 2.7 実行可能性判定

第 2.2 節では、原点が実行可能、すなわち  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  である基準形の線形計画問題を解くシンプレックス法を紹介した。ここではこのシンプレックス法を用いて、一般の基準形の線形計画問題が実行可能であるかを判定する方法を簡単に示す。ここで紹介する方法はあまり一般的ではないが、双対問題を用いた判定法である。次のような基準形の問題の実行可能性を判定する。

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{subject to} && A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & && \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.14}$$

ここで、目的関数を変えた問題

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \mathbf{0}^T \mathbf{x} \\ & \text{subject to} && A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & && \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.15}$$

とその双対問題（基準形に変形したもの）

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && -\mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ & \text{subject to} && -A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{0} \\ & && \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.16}$$

を考える。ここで以下のような事実に注目する。

- 問題 (2.14) と問題 (2.15) の実行可能領域は一致する。
- 問題 (2.15) は実行可能解を持てば必ず最適解を持つ。
- 問題 (2.16) では原点が実行可能で第 2.2 節のシンプレックス法が適用できる。

これらより、問題 (2.16) を第 2.2 節のシンプレックス法と最小添字規則を用いて解き、これが最適解を持てば (2.15) も最適解を持ち、問題 (2.14) は実行可能である。また、(2.16) が非有界ならば (2.15) は実行不可能で、問題 (2.14) も実行不可能となる。

## 3 組合せ最適化問題への応用例

本節では、線形計画法の組合せ最適化への応用例を幾つか紹介する。基本的な例をあげるが、より詳しいことは [15, 24, 27] などを参照されたい。

多くの組合せ最適化問題は次のように記述される：与えられた有限集合  $X$  と  $X$  の部分集合族  $\mathcal{F}$ 、重みベクトル  $\mathbf{w} = (w_e : e \in X)$  に対して、

$$\max_{F \in \mathcal{F}} \sum_{e \in F} w_e \tag{3.1}$$

を達成する  $F \in \mathcal{F}$  を求める。ここで注意しておくが一般に  $\mathcal{F}$  は陽には与えられていない。例えば、グラフ  $G = (V, E)$  に対して、 $X$  を頂点集合  $V$  とし、 $\mathcal{F}$  を安定集合全体、 $\mathbf{w} = (1, \dots, 1)$  と置いたとき、上記のように記述される問題は最大安定集合問題、すなわち、要素数最大な安定

集合を求める問題となる。ここで、 $U \subseteq V$  の任意の2頂点間に辺が存在しないとき、 $U$  をグラフ  $G$  の安定集合 (stable set) という。

一方、 $X$  の部分集合  $F$  に対して、 $F$  の指示ベクトル  $\chi(F)$ 、すなわち、次のように定義される0-1ベクトルを導入する：

$$\chi(F)_e = \begin{cases} 1 & \text{if } e \in F, \\ 0 & \text{if } e \notin F. \end{cases}$$

組合せ最適化問題 (3.1) は次のように凸多面体上での線形関数の最大化問題と‘ほぼ同値’となる。

$$\text{maximize } \mathbf{w}^T \mathbf{x} \text{ subject to } \mathbf{x} \in P(\mathcal{F}) \equiv \text{co}\{\chi(F) : F \in \mathcal{F}\} \quad (3.2)$$

ここで、 $\text{co}\{\dots\}$  は与えられたベクトル集合の凸包を意味する。 $\mathcal{F}$  の要素に対応した指示ベクトルは問題 (3.2) の多面体  $P(\mathcal{F})$  の端点となり逆も正しいが、(3.2) は端点以外にも最適解が存在することがあるので‘ほぼ同値’と言った。もし  $P(\mathcal{F})$  の不等式表現が既知であれば (3.2) は線形計画問題となるが、一般にはこのようなことは望めない。組合せ最適化問題を解く方法として、 $P(\mathcal{F})$  の部分的な不等式表現を利用した切除平面法が知られている。この方法の基本的な考え方は、まず  $P(\mathcal{F})$  の部分的な不等式表現  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$  が与えられていたときに、まず凸多面体  $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$  上で  $\mathbf{w}^T \mathbf{x}$  を最大化する線形計画問題を解く。もしこの最適解  $\mathbf{x}^0$  が  $P(\mathcal{F})$  の点であれば  $\mathbf{x}^0$  は問題 (3.2) の最適解となる。そうでない場合には、 $P \subseteq \{\mathbf{x} : \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \beta\} \not\ni \mathbf{x}^0$  であるような不等式  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \beta$  を求め、 $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$  に加え、新しい部分不等式系に対して以上のことを繰り返す。一般的には、条件を満たす新しい不等式  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \beta$  が求まる保証はないので、分枝限定法と組み合わせた分枝カット法が巡回セールスマン問題に有効であることが報告されている [25]。上記のように組合せ最適化問題を解くうえで、線形計画法は実用上非常に重要な位置をしめている。多くの難しい組合せ最適化問題に対しては多面体  $P(\mathcal{F})$  の完全な不等式表現は知られていないが、 $P(\mathcal{F})$  の不等式表現を研究することは重要な課題であり、これに関しては [15, 24] などを参照されたい。

多面体  $P(\mathcal{F})$  の部分的な不等式表現を得るための簡単な方法として、組合せ最適化問題の整数計画問題としての定式化の利用がある。一般に整数計画問題は、

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{subject to} && A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ &&& \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ &&& \mathbf{x} \text{ は整数ベクトル} \end{aligned} \quad (3.3)$$

のように定義される。例えば、前述の最大安定集合問題はグラフ  $G = (V, E)$  の頂点辺接続行列  $A$ ：

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{頂点 } i \text{ に辺 } j \text{ が接続するとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を用いると

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \mathbf{1}^T \mathbf{x} \\ &\text{subject to} && A^T \mathbf{x} \leq \mathbf{1} \\ &&& \mathbf{x} \in \{0, 1\}^V \end{aligned}$$

のように定式化できる。ただし  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$  とする。ここで  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^V$  という整数条件を  $\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}$  という不等式条件に置き換えてみると、 $A^T \mathbf{x} \leq \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{x} \leq \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  は  $\mathcal{F}$  が安定集合全体のときの  $P(\mathcal{F})$  の部分的な不等式表現となり、このように不等式表現された多面体上で  $\mathbf{1}^T \mathbf{x}$  を最大化する線形計画問題を (3.3) の線形緩和問題という。線形緩和問題は、 $P(\mathcal{F})$  の部分的な不等式表現を得られるばかりでなく幾つかの組合せ的な性質を証明することができる。ここでは、マッチングと頂点被覆を例にそれを紹介する。

### 3.1 マッチングと頂点被覆

グラフ  $G = (V, E)$  に対して、 $M \subseteq E$  の任意の2つの辺が頂点を共有しないとき、 $M$  を  $G$  のマッチングという。特に、要素数最大のマッチングは最大マッチングと呼ばれるが、これを求める問題は以下のような整数計画問題として定式化できる。

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \mathbf{1}^T \mathbf{x} \\ & \text{subject to} && A\mathbf{x} \leq \mathbf{1} \\ & && \mathbf{x} \in \{0, 1\}^E \end{aligned} \quad (3.4)$$

ただし  $A$  は  $G$  の頂点辺接続行列とする。すなわち  $G$  の頂点辺接続行列  $A$  に対して、任意のマッチングの指示ベクトルは系  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^E$  を満たし、逆にこの系を満たすベクトル  $\mathbf{x}$  はあるマッチングの指示ベクトルとなっている。

一方、 $W \subseteq V$  に対して、 $G$  の各辺の少なくとも一方の頂点が  $W$  に含まれるとき、 $W$  を  $G$  の頂点被覆といい、要素数最小の頂点被覆を最小頂点被覆という。マッチング同様に、 $A$  を頂点辺接続行列としたとき、任意の頂点被覆の指示ベクトルは系  $A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{y} \in \{0, 1\}^V$  を満たし、逆にこの系を満たすベクトルはある頂点被覆の指示ベクトルとなっている。よって最小頂点被覆を求める問題は、次のような整数計画問題として書ける。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \mathbf{1}^T \mathbf{y} \\ & \text{subject to} && A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{1} \\ & && \mathbf{y} \in \{0, 1\}^V \end{aligned} \quad (3.5)$$

ここで、それぞれ (3.4) と (3.5) の次のような線形緩和問題を考えてみる。

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \mathbf{1}^T \mathbf{x} \\ & \text{subject to} && A\mathbf{x} \leq \mathbf{1} \\ & && \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \mathbf{1}^T \mathbf{y} \\ & \text{subject to} && A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{1} \\ & && \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.7)$$

ここで注意しておくが、(3.6) において  $\mathbf{x} \leq \mathbf{1}$  は  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{1}$  より弱い条件であり冗長とならないように除いた。さて、線形計画問題 (3.6) と (3.7) はそれぞれの双対問題となっており、ともに自明な実行可能解  $\mathbf{0}$  と  $\mathbf{1}$  を持っているのでそれぞれ最適解が存在する。問題 (3.4), (3.5) の最適目的関数値を  $z^M$ ,  $z^W$  とし、上記2つの線形計画問題の最適値を  $z$  とすると、緩和問題の関係から

次のような不等式を得る。

$$z^M \leq z \leq z^W$$

これは、「最大マッチングの大きさは、最小頂点被覆の大きさ以下である」ことの別証明（直接証明の方が楽だが）になっている。注意しておくが、一般に上記の不等式は等号が成り立たない。例えば、 $G$  が3角形の時、 $z^M = 1$ ,  $z = 3/2$ ,  $z^W = 2$  となる。

ここでは、もう一つ線形緩和問題の双対性から最大重みマッチングを求める貪欲解法の性能評価を試みよう。ここでは問題 (3.4) の目的関数を一般の重みベクトル  $w$  で置き換えた最大重みマッチング問題

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && w^T x \\ & \text{subject to} && Ax \leq 1 \\ & && x \in \{0, 1\}^E \end{aligned} \quad (3.8)$$

を考える。ここでは、貪欲算法と呼ばれる方法を考える。また、説明上  $E = \{1, 2, \dots\}$  とする。貪欲算法は、まず  $w_1 \geq w_2 \geq \dots$  となるように辺を整列し、 $M = \emptyset, k = 1$  とおき、以下を繰り返す。もし  $M \cup \{k\}$  がマッチングなら  $k$  を  $M$  に加え  $k$  を1増やし、 $M \cup \{k\}$  がマッチングでないなら単に  $k$  を1増やす。貪欲解法は必ずしも最適解を求めるとは限らないが、よく知られているように求まった解の精度が保証されている。すなわち、(3.8) の最適目的関数値を  $z^*$  とし、貪欲解法が求めたマッチングの重みを  $z^g$  とすると

$$z^g \geq z^*/2 \quad (3.9)$$

が成り立つ。この不等式の線形緩和問題と双対定理を用いた証明を紹介しよう。まず、(3.8) の線形緩和問題の双対問題は、

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \sum_{i \in V} y_i \\ & \text{subject to} && y_u + y_v \geq w_e \quad \text{for all } e = (u, v) \in E \\ & && y \geq 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

となる。貪欲算法によって得られたマッチングを  $M^g$  とし、 $M^g$  からつぎのようにベクトル  $\hat{y} \in R^V$  を構成する。

$$\begin{aligned} \hat{y}_u &= \hat{y}_v = w_e && \text{for } e = (u, v) \in M^g \\ \hat{y}_i &= 0 && \text{その他} \end{aligned}$$

$M^g$  がマッチングより  $\hat{y}$  は矛盾なく定義され、以下ではこれが双対問題 (3.10) の実行可能解となることを示す。ある辺  $f = (i, j) \in E$  に対して

$$\hat{y}_i + \hat{y}_j < w_f$$

であると仮定する。 $\hat{y}$  の定義より  $f \notin M^g$  となるが、貪欲算法のルールより  $i$  または  $j$  に接続する別の辺  $f'$  が  $M^g$  に含まれ、 $w_{f'} \geq w_f$  が成り立たなければならない。しかしこのとき、 $\hat{y}_i + \hat{y}_j \geq w_{f'} \geq w_f$  となり矛盾する。よって  $\hat{y}$  は (3.10) の実行可能解である。従って (3.10) の最適解を  $z$  とすると双対定理より

$$2z^g = 2 \sum_{e \in M^g} w_e = \sum_{i \in V} \hat{y}_i \geq z \geq z^*$$

となり (3.9) が示せた。

### 3.2 完全単模行列

整数計画問題の線形緩和問題を解いたときに、最適解が整数解になっていればこの最適解は元々の整数計画問題の最適解にもなっている。この性質は、問題を解く上でも双対定理と併用し組合せ的な性質を導く上でも重要となる。ここでは、この性質が成り立つための一つの十分条件である行列の完全単模性を紹介する。

行列  $A$  が完全単模 (totally unimodular) であるとは、任意の小行列式の値が  $1, -1$  または  $0$  となることである。特に完全単模行列の各要素は、 $1, -1, 0$  となる。完全単模性から次の重要な定理が導ける。

**定理 3.1:**  $A$  が完全単模行列のとき、任意の整数ベクトル  $b$  に対して多面体  $P = \{x : Ax \leq b\}$  は整数多面体となる。すなわち、 $P$  の任意の極小面は整数点を含む。

**証明:** 任意の極小面  $F$  は、系  $Ax \leq b$  の部分系  $A'x \leq b'$  によって  $F = \{x : A'x = b'\}$  として表せる。ただし、 $A'$  は full row rank である。 $A'$  の基底行列を適当にとるとその行列式は  $1$  または  $-1$  であり、 $b'$  は整数ベクトルであるから、この基底行列に対応した  $F$  内の点は整数点となる。 ■

上記の定理より、 $P$  上で線形関数を最適化したとき、最適解が存在するなら整数最適解が存在する (最適解の集合は  $P$  の面となるから)。特に、シンプレックス法は最適な端点解を求めるので、 $P$  内の整数点を実行可能領域とする整数計画問題の線形緩和問題をシンプレックス法で解けば元々の整数計画問題の最適解が得られることになる。ここでは、マッチングの例を紹介しよう。その前に2つの補題を紹介する。

**補題 3.2:** グラフ  $G = (V, E)$  の頂点辺接続行列を  $A$  としたとき、 $A$  が完全単模であるための必要十分条件は  $G$  が2部グラフになることである。

**証明:**  $A$  の小行列  $U$  を考える。 $U$  の各列は非ゼロ要素は高々2つしか含まない。仮に、非ゼロ要素を含まない列があったら  $U$  の行列式は  $0$  である。またどの列にも非ゼロ要素がちょうど2つあるなら、 $G$  が2部グラフであることより、一方の頂点集合に対応した行の和からもう一方の頂点集合に対応した行の和を引くとゼロベクトルとなるので  $U$  の行列式は  $0$  である。ある列の非ゼロ要素がちょうど1つなら、その列と非ゼロ要素を含む行を除いてくことでえられる小行列式の絶対値と  $U$  の行列式の絶対値を等しい。このような場合は  $U$  の大きさを小さくしていく。上記のように、 $U$  の行列式は  $1, -1, 0$  のいずれかとなる。一方、 $G$  が2部グラフでないなら、長さが奇数のサイクルが存在する。奇サイクルの中で長さ最小のものの頂点集合と辺集合に対応した  $A$  の小行列を考えると、この小行列の行列式は  $1, -1, 0$  とならない。すなわち、頂点辺接続行列  $A$  は完全単模ではない。 ■

**補題 3.3:** 行列  $A$  が完全単模ならば、 $A^T$  や単位行列  $I$  と  $A$  からなる行列

$$\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}$$

も完全単模である。



さて準備が整ったので、話を2部グラフ  $G$  のマッチングに移そう。 $G$  の最大マッチングを求める問題は整数計画問題 (3.4) のように定式化できることは先に述べた。その線形緩和問題 (3.6) の制約条件の不等式系の係数行列は上記2つの補題より完全単模である。すなわち、(3.6) をシンプレックス法で解けば (3.4) の解が求まる。一方 (3.6) の双対問題 (3.7) の制約式の係数行列も完全単模となり、双対問題にも整数最適解が存在し、これらの目的関数値は一致している。主問題 (3.6) の整数最適解は2部グラフ  $G$  の最大マッチングであり、双対問題 (3.7) の整数最適解は問題 (3.5) の解、すなわち、最小頂点被覆となる。上記は次のよく知られた König の定理 [19] の別証明である。

**定理 3.4:** 2部グラフの最大マッチングと最小頂点被覆の大きさは等しい。

完全単模性の他の特徴付けや与えられた行列が完全単模かの判定などに関することは [27] を参照されたい。

#### 4 線形計画法に関連した話題

最後に線形計画法に関連した話題を2つ紹介する。1つは線形計画問題を組合せ的に一般化した問題を扱う有向マトロイド計画問題であり、もう1つは線形緩和問題よりも良い緩和問題を得る半正定値計画問題である。ここでは、基本的な定義や用語の説明のみにとどめるので解法等については各節にあげた文献を参照されたい。

##### 4.1 有向マトロイド計画問題

まず、有向マトロイドとは何かを紹介しよう。その具体的な例の1つが線形部分空間である。 $n$  次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の部分集合  $L$  が  $\mathbb{R}^n$  の線形部分空間 (linear subspace) であるとは、

$$x, y \in L, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow ax + by \in L$$

を満たすことである。実数ベクトル  $x$  に対して、各要素をその符号で置き換えたベクトルを  $\sigma(x)$  と書くことにする。このようなベクトルは符号ベクトル (signed vector) と呼ばれ、例えば

$$\begin{aligned} x &= (1, 9, -6, -1, 0, 0) \rightarrow \sigma(x) = (+ + - - 0 0) \\ y &= (1, -9, 6, 0, 0, 7) \rightarrow \sigma(y) = (+ - + 0 0 +) \end{aligned}$$

となる。また符号ベクトルの集合  $\sigma(L)$  を以下のように定義する：

$$\sigma(L) = \{\sigma(x) \mid x \in L\}$$

ここで  $\sigma(L)$  の満たすべき性質について調べてみよう。 $L$  は線形部分空間であるから、次のような特殊な線形結合についても閉じている。

- (L1)  $0 \in L$ 。
- (L2)  $x \in L \Rightarrow -x \in L$ 。
- (L3)  $x, y \in L, 0 < \varepsilon \leq 1 \Rightarrow x + \varepsilon y \in L$ 。
- (L4)  $x, y \in L, x_f \times y_f < 0 \Rightarrow |y_f|x + |x_f|y \in L$ 。

(L1) は  $a = b = 0$  とすることで得られ、(L2) は  $a = -1, b = 0$  とすることで得られる性質である。(L3) では、 $\varepsilon$  が充分小さい正の数であることを意味している。さて上の性質をベクトルの要素の符号に注目して見直してみる。(L1) は  $\sigma(L)$  がすべての要素が 0 である符号ベクトル  $\mathbf{0}$  を含んでいることを意味し、(L2) は  $\sigma(L)$  に含まれる符号ベクトルの符号を反転させたものも  $\sigma(L)$  に含まれることを意味する。(L3) は上の  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  を例とすると、 $\varepsilon$  が充分小さい正数なので、

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{x}) &= ( + + - - 0 0 ) \\ \sigma(\mathbf{y}) &= ( + - + 0 0 + ) \\ \sigma(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{y}) &= ( + + - - 0 + )\end{aligned}$$

となるが、ここで注目したいのは  $\sigma(\mathbf{x})$  の要素で 0 でないところはそのまま  $\sigma(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{y})$  に引き継がれ (第 1 から第 4 要素)、0 であるときにのみ  $\sigma(\mathbf{y})$  の符号が引き継がれることである (第 5、6 要素)。(L4) も上の  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  を使い  $f = 2$  とすると

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{x}) &= ( + + - - 0 0 ) \\ \sigma(\mathbf{y}) &= ( + - + 0 0 + ) \\ \sigma(|y_2|\mathbf{x} + |x_2|\mathbf{y}) &= ( + 0 ? - 0 + )\end{aligned}$$

となる。 $|y_2|\mathbf{x} + |x_2|\mathbf{y}$  の符号パターンで言えることは、 $f$  として選んだ第 2 要素は 0 となり、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  の符号が反転していないところ (第 1、4、5、6 要素) では  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  の要素の値によらずその符号が確定することである。一方、第 3 要素はの場合 0 となるが、 $x_3, y_3$  の値によっては  $+, 0, -$  のどれにも成りえるので、上ではあえて? とした。実は有向マトロイドとは、上記の 4 つの性質を満たす符号ベクトル集合のことであり、 $\sigma(L)$  は有向マトロイドの一例である。以下では、これら 4 つの性質を符号ベクトルを用いて記述し、有向マトロイドを定義する。

まず記号など幾つかのものを定義しておく。 $E$  を有限集合とする。各  $e \in E$  に対して、対応した要素  $X_e$  が  $+, 0, -$  の何れかであるベクトル  $X = (X_e : e \in E)$  を  $E$  上の符号ベクトル (signed vector) と呼ぶ。例えば  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ならば

$$\begin{aligned}\{ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \} &= E \\ X &= ( + + - - 0 0 ) \\ Y &= ( + - + 0 0 + )\end{aligned}$$

などは  $E$  上の符号ベクトルとなる。ここでは、符号ベクトルを表現するのに大文字のアルファベット  $X, Y, Z$  などを用い、 $E$  上の符号ベクトル全体を  $\{+, 0, -\}^E$  と書く。符号ベクトル  $X$  に対して、その要素の符号をすべて反転させたものを  $-X$  と書くことにする。上の例の  $X$  については

$$-X = ( - - + + 0 0 )$$

となる。また次のような記号を以下では用いる： $X^+ = \{e \in E \mid X_e = +\}$ ,  $X^0 = \{e \in E \mid X_e = 0\}$ ,  $X^- = \{e \in E \mid X_e = -\}$ ,  $\underline{X} = X^+ \cup X^-$ 。二つの符号ベクトル  $X, Y$  に関して、符号ベクトル  $X \circ Y$  の各要素を

$$(X \circ Y)_e = \begin{cases} X_e & (X_e \neq 0 \text{ のとき}) \\ Y_e & (X_e = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する。 $X \circ Y$  を  $X$  と  $Y$  の結合 (composition) といい、先程の議論より二つの実ベクトル  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  についての  $\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{y}$  と対応している。明らかに  $(X \circ Y) \circ Z = X \circ (Y \circ Z)$  が成り立つ。符号ベクトル  $X, Y$  に対して、符号が反転している部分を  $D(X, Y)$  で表す。すなわち  $D(X, Y) = \{e \in E \mid X_e = -Y_e \neq 0\} = (X^+ \cap Y^-) \cup (X^- \cap Y^+)$  である。

さて道具がそろったところで有向マトロイドを定義しよう。有限集合  $E$  上の符号ベクトル集合  $\mathcal{F} \subseteq \{+, 0, -\}^E$  が以下の4つの条件を満たすとき、 $\mathcal{F}$  を  $E$  上の有向マトロイド (oriented matroid) という：

$$(F1) \quad \mathbf{0} \in \mathcal{F}.$$

$$(F2) \quad X \in \mathcal{F} \Rightarrow -X \in \mathcal{F}.$$

$$(F3) \quad X, Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \circ Y \in \mathcal{F}.$$

$$(F4) \quad X, Y \in \mathcal{F}, f \in D(X, Y)$$

$$\Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ は次のような } Z \text{ を含む:} \\ Z_f = 0 \text{ かつ } e \notin D(X, Y) \text{ に対して } Z_e = (X \circ Y)_e \end{array} \right\rangle.$$

上記の定義は本来 [12, 22] によるものである。 $\mathcal{F}$  の要素はベクトル (vector) などと呼ばれている。また有向マトロイドには幾つもの同値な表現方法が存在し、正確には  $\mathcal{F}$  は有向マトロイドのベクトル族 (vector family) などと呼ばれる。

有向マトロイド理論は、Minty[23] の彩色補題に関する研究や Rockafellar[26] による線形部分空間の基本ベクトルの研究を動機とし、1970 年代中頃に二つのグループ Bland と Las Vergnas[6]、Folkman と Lawrence[11] によって独立に始められた分野である。先にも触れたように有向マトロイドには幾つもの同値な表現方法が存在し、詳しくは論文 [7, 10, 16] などや著書 [2, 3] を参照されたい。体系的により深く有向マトロイド理論について勉強されたい方には [3] を勧める。

次に有向マトロイドの双対性について紹介する。二つの実ベクトルが直交するとはそれらの内積が 0 となることである。例えば、次の様なベクトル

$$\mathbf{x} = (+1, +2, -2, -3, +2, 0)$$

$$\mathbf{y} = (+6, -1, +2, 0, 0, +3)$$

$$\mathbf{z} = (0, 0, 0, +1, +1, 0)$$

に対して、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  や、 $\mathbf{y}$  と  $\mathbf{z}$  は内積が 0 であり直交する。実ベクトルが直交する場合二つのタイプが考えられる。一つ目は  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  の直交性のように、符号が一致する要素 (第 1 要素) と異なる要素 (第 2, 3 要素) が存在し最終的につじつまがあって内積が 0 になる場合である。もう一つは、 $\mathbf{y}$  と  $\mathbf{z}$  の直交性のように各要素でどちらか一方は 0 となっている場合である。符号ベクトルに対しても直交性を考えたいが、上の二つの場合分けを用いて定義をする。符号ベクトル  $X, Y \in \{+, 0, -\}^E$  に対して、次の一方が成り立つときこれらは直交 (orthogonal) するといい、 $X \perp Y$  と書く：

$$(o1) \quad \text{すべての } e \in E \text{ に対して、} X_e = 0 \text{ または } Y_e = 0 \text{ となる。}$$

$$(o2) \quad \text{ある } f, g \in E \text{ が存在し、} X_f = Y_g \neq 0 \text{ かつ } X_g = -Y_f \neq 0 \text{ となる。}$$

ここで注意しておくが、上の  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{z}$  は実ベクトルの意味で直交しないが、二つの符号ベクトル  $\sigma(\mathbf{x})$  と  $\sigma(\mathbf{z})$  は直交している。このようにかなりいい加減な直交性の定義に思えるが、実はそうでもない。その理由を述べる前に一つ定義を与えておく。符号ベクトル集合  $\mathcal{F} \subseteq \{+, 0, -\}^E$  対

して、

$$\mathcal{F}^* = \{Y \in \{+, 0, -\}^E \mid X \perp Y (\text{すべての } X \in \mathcal{F} \text{ に対して})\}$$

を  $\mathcal{F}$  の双対 (dual) と呼ぶ。このとき次のような性質が言える。

**補題 4.1:** 実線形部分空間  $L \subseteq \Re^E$  に対して、

$$\sigma(L^\perp) = (\sigma(L))^*$$

が成り立つ。ただし  $L^\perp$  は  $L$  の直交補空間を表す。

直交補空間  $L^\perp$  とは  $L$  に含まれるすべての実ベクトルと直交する実ベクトル全体であるが、補題 4.1 は、 $L$  の全要素と実ベクトルの意味で直交する実ベクトル全体から作った符号ベクトル集合  $\sigma(L^\perp)$  と、 $L$  から作った符号ベクトル集合  $\sigma(L)$  の全要素と符号ベクトルの意味で直交する符号ベクトル全体  $(\sigma(L))^*$  が一致することを主張している。このように符号ベクトルの直交性は実ベクトルの直交性の本質を抽出したものである。

さて直交補空間  $L^\perp$  も線形部分空間であるから  $\sigma(L^\perp)$  も有向マトロイドのベクトル族となり、これは有向マトロイド  $\sigma(L)$  の双対であることを補題 4.1 は示している。一般に有向マトロイドのベクトル族  $\mathcal{F}$  に対して  $\mathcal{F}^*$  は有向マトロイドとなる。

**補題 4.2:** [6, 12] 有向マトロイドのベクトル族  $\mathcal{F}$  に対して、 $\mathcal{F}^*$  も有向マトロイドのベクトル族の定義 (F1)、(F2)、(F3) と (F4) を満たす。

$\mathcal{F}^*$  の要素はコベクトル (covector) などと呼ばれている。

さて、有向マトロイドの定義等が出来たので次に本題の有向マトロイド計画問題に話を移すが、その前に線形計画問題を見直してみよう。ここでは、標準形 (standard form) と呼ばれる次のような線形計画問題

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{subject to} && A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & && \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.1)$$

を考える。ただし、 $A \in \Re^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \Re^m$ ,  $\mathbf{c} \in \Re^n$  とする。これも特殊な線形計画問題ではあるが、基準形の問題にスラック変数を導入すると標準形に変形できるので、基準形同様にこのような問題だけを扱っても理論的には一般性を欠くことはない。さてここで、目的関数を  $x_f = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$  とおき、定数項に  $x_g$  という変数をかけて (4.1) を次のように変形する：

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && x_f \\ & \text{subject to} && x_f - \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0 \\ & && A\mathbf{x} - \mathbf{b}x_g = \mathbf{0} \\ & && \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, x_g = 1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

更に線形部分空間

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_f \\ \mathbf{x} \\ x_g \end{pmatrix} \in \Re^{n+2} \mid \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{c}^T & 0 \\ \mathbf{0} & A & -\mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_f \\ \mathbf{x} \\ x_g \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\} \quad (4.3)$$

を導入することによって、問題 (4.2) は、

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && x_f \\ & \text{subject to} && (x_f, \mathbf{x}, x_g) \in L \\ & && \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, x_g = 1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

のように線形部分空間  $L$  を用いて書き表せる。ここで注意したいのは、 $x_g$  は 1 である必要はない。正定数  $\delta$  に対して、 $x_g = 1$  の代わりに  $x_g = \delta$  を制約としても実行可能性と有界性は保存され、この問題の最適解の各要素を  $\delta$  で割れば (4.4) の最適解が得られる。すなわち、問題 (4.4) の制約は線形部分空間に含まれるというものと残りは符号に関するものである。

前節で紹介したように有向マトロイドは符号に注目し実線形部分空間を一般化したものであった。そこで線形計画問題 (4.4) を素直に拡張し有向マトロイド計画問題を定義しよう。有限集合  $E$  上の有向マトロイドのベクトル族  $\mathcal{F}$  と  $E$  の固定された 2 つの要素  $f, g$  に対する有向マトロイド計画問題 (oriented matroid programming problem) を次のように‘定義’する：

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && X_f \\ & \text{subject to} && X \in \mathcal{F} \\ & && X_g = +, X_H \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.5)$$

ただし  $H = E - \{f, g\}$  とし、 $X_H$  は  $X$  を  $H$  上へ制限してできる符号ベクトルを表し、 $X_H \geq \mathbf{0}$  は各要素が+または0であることを意味する。またこの問題を  $(\mathcal{F}, g, f)$  と書くことにする。しかしこれで有向マトロイド計画問題が定義されたのであろうか。幾つか疑問がある。

- ・ 符号しかない世界で maximize  $X_f$  とはいったい何を意味するのだろうか。
- ・ どんな答えを要求している問題なのだろうか。
- ・  $\mathcal{F} = \sigma(L)$  のとき、(4.4) と (4.5) は同値だろうか。
- ・ 基本定理のようなものが存在するのだろうか。

これらの疑問に答える前に幾つかの概念を定義しよう。 $\mathcal{F}$  の中で  $g$  成分が正であるもの全体の集合

$$\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{F} \mid X_g = +\}$$

をアフィン空間 (affine space) と呼び、 $g$  成分が 0 であるもの全体

$$\mathcal{A}^\infty = \{Z \in \mathcal{F} \mid Z_g = 0\}$$

を無限空間 (infinite space) または方向空間 (direction space) と呼ぶ。アフィン空間は線形部分空間  $L$  の点  $\mathbf{x}$  で  $g$  成分が 1 であるもの全体に対応している。方向空間の要素は方向 (direction) と呼ばれ、 $L$  の要素  $\mathbf{z}$  で  $g$  成分が 0 であるものに対応している。 $\mathbf{x} + \mathbf{z}$  はやはり  $L$  の要素で  $g$  成分が 1 であるように、 $X \circ Z$  もやはりアフィン空間の要素となる。

アフィン空間の要素  $X$  でさらに  $X_H \geq \mathbf{0}$  を満たすものを  $(\mathcal{F}, g, f)$  の実行可能解 (feasible solution) と呼ぶ。実行可能解全体を実行可能領域 (feasible region) または多面体 (polyhedron) と呼び、 $\mathcal{P}$  と書く。実行可能領域  $\mathcal{P}$  が非空であるとき、問題  $(\mathcal{F}, g, f)$  は実行可能 (feasible) であるといい、それ以外るとき実行不可能 (infeasible) であるという。

実行可能解  $X$  に対して、 $X \circ Z \in \mathcal{P}$  となる方向  $Z$  を、 $X$  での**実行可能方向** (feasible direction) という。線形計画問題の実行可能解  $x$  に対して  $z$  方向に微小量  $\varepsilon > 0$  だけ進んだ点  $x + \varepsilon z$  がやはり実行可能であるような  $z$  に対応している。線形計画問題 (4.4) では、実行可能解  $x$  が最適解であるための必要十分条件は  $z_f > 0$  となる  $x$  での実行可能方向  $z$  が存在しないことである。そこで  $(\mathcal{F}, g, f)$  の実行可能解  $X$  での実行可能方向  $Z$  で  $Z_f = +$  となるものが存在しないとき、 $X$  は**最適解** (optimal solution) であると定義する。

問題 (4.4) が実行可能であるとき、これが非有界である必要十分条件は、 $g$  成分が 0 でそれ以外は非負、さらに  $f$  成分が正であるベクトル  $z$  を  $L$  が含むことである。そこで実行可能な問題  $(\mathcal{F}, g, f)$  において、 $Z_g = 0$ ,  $Z_f = +$  かつ  $Z_H \geq 0$  である方向  $Z$  が存在するとき、 $(\mathcal{F}, g, f)$  は**非有界** (unbounded) であると定義し、それ以外のときは**有界** (bounded) ということにする。

有向マトロイド計画問題のあいまいな定義であった (4.5) は、「もし最適解が存在するならばそれを求めよ」と読んで頂きたい。もちろん実行不可能や非有界ならそれも判定して欲しい。これで第 1、2 の疑問は解決したと思う。第 3 の疑問であるが、上記の解の実行可能性、最適性、問題の非有界性の定義から、 $\mathcal{F} = \sigma(L)$  であるとき問題 (4.4) と (4.5) が同値であることが分かると思う。さて、第 4 の疑問であるがやはり線形計画問題同様に次のような定理が成り立つ。

**定理 4.3 (基本定理) :** 実行可能で有界な有向マトロイド計画問題  $(\mathcal{F}, g, f)$  は最適解を持つ。

この定理は当初 Bland[4] と Lawrence[21] によって独立に証明された。その他の文献 [11, 12] などにもこの定理の証明を見ることができる。ただし、基本定理の逆命題「最適解を持てば有界である」が成り立つことは定義より直ちに分かる。

次に有向マトロイド計画問題の双対問題を考える。上記と同様にまず線形計画問題から見直すことにする。線形計画問題 (4.1) の双対問題は以前にも触れたが

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && b^T u \\ & \text{subject to} && A^T u \geq c \end{aligned} \quad (4.6)$$

である。目的関数を  $y_g = -b^T u$  とおき、定数項に変数  $u_f$  をかけ最大化問題に書き換えて

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && y_g \\ & \text{subject to} && y_f = u_f \\ & && y = -cu_f + A^T u \\ & && y_g = -b^T u \\ & && y \geq 0, u_f = 1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

とする。更に (4.3) で定義した線形部分空間の直交補空間  $L^\perp$  が

$$L^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} y_f \\ y \\ y_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -c^T & 0 \\ 0 & A & -b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u_f \\ u \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} u_f \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} \right\}$$

と書けることから、問題 (4.7) は

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && y_g \\ & \text{subject to} && (y_f, y, y_g) \in L^\perp \\ & && y \geq 0, y_f = 1 \end{aligned} \quad (4.8)$$

のように  $L$  の直交補空間  $L^\perp$  を用いて書き直せる。

さて問題 (4.4) と (4.8) の双対関係と補題 4.1 と補題 4.2 の主張から有向マトロイド計画問題  $(\mathcal{F}, g, f)$  の双対問題 (dual problem) を

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && Y_g \\ & \text{subject to} && Y \in \mathcal{F}^* \\ & && Y_f = +, Y_H \geq 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

と定義する。すなわち  $(\mathcal{F}, g, f)$  の双対問題は  $(\mathcal{F}^*, f, g)$  となる。線形計画問題では、双対問題の双対問題が主問題となることに触れたが実は有向マトロイド計画問題でも同様で、これは  $(\mathcal{F}^*)^* = \mathcal{F}$  となることよりいえる。

線形計画問題に対しては双対定理や相補性定理が成り立つことを先に述べたが実は有向マトロイド計画問題に対してもこれらの一般化が成立する。

**定理 4.4 (双対定理) :**  $(\mathcal{F}, g, f)$  または  $(\mathcal{F}^*, f, g)$  の一方が最適解を持てば他方も最適解を持つ。

定理 4.4 が線形計画問題に対する双対定理の一般化になっていることは上記の議論より言える。この定理は Bland[4] や Lawrence[21] によって証明された。

**定理 4.5 (相補性定理) :**  $(\mathcal{F}, g, f)$  の実行可能解  $X$  と  $(\mathcal{F}^*, f, g)$  の実行可能解  $Y$  がそれぞれの問題の最適解であるための必要十分条件は、

$$\{e \in E \mid X_e \neq 0\} \cap \{e \in E \mid Y_e \neq 0\} \subseteq \{f, g\}$$

という相補性条件 (complementary slackness) が成り立つことである。

この相補性条件を第 2.6 節での相補性条件と関連付けるのは多少距離があるように思うが、標準形の線形計画問題 (4.1) とその双対問題 (4.6) に対する相補性条件は

$$x_i = 0 \text{ または } (A^T \mathbf{u})_i = c_i \quad (\text{各 } i = 1, 2, \dots, n \text{ について})$$

となることが第 2.6 節の結果から示せる。これは問題 (4.4) と (4.8) の実行可能解に対する

$$x_i = 0 \text{ または } y_i = 0 \quad (\text{各 } i \neq f, g \text{ について})$$

と同じことであるから定理 4.5 は線形計画問題に対する相補性定理の一般化である。有向マトロイド計画問題に対する相補性定理は Bland[4] によって初めて証明された。

この節では基本定理、双対定理、相補性定理の主張のみにとどめ、有向マトロイド計画問題の解法等には一切触れなかったが詳しくは [3, 29] などを参考にされたい。

## 4.2 半正定値計画問題

線形計画問題は、幾つかの線形等式、線形不等式と非負制約を満たす実ベクトルの中で与えられた線形関数を最大化 (あるいは最小化) するものを求める問題であった。半正定値問題とは、簡単に言うと線形計画問題の「実ベクトルが非負」の代わりに「実対称行列が半正定値」と読みか

えた問題である。正確には、与えられた  $d \times d$  実対称行列  $A^0, A^1, \dots, A^n$  と  $n$  次元実ベクトル  $\mathbf{b}$  に対して次のように記述される。

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && A^0 \bullet X \\ & \text{subject to} && A^i \bullet X = b_i \quad (i = 1, \dots, n) \\ & && X \succeq 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

ここで、 $X \succeq 0$  は行列  $X$  が半正定値であることを意味し、 $X \bullet Y = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d X_{ij} Y_{ij}$ 、すなわち、 $X \bullet Y$  は  $X$  と  $Y$  を  $(d \times d)$  次元ベクトルとみなしたときの内積となる。

以下では、整数計画問題を線形緩和した場合より、半正定値問題を用いた緩和の方が良いことを簡単に紹介する。半正定値計画問題の解法等については、[1] を参照されたい。

一般に整数計画問題の実行可能領域は次のような整数端点を持つ多面体とみなせる。

$$P = \text{co} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{1+n} \left| \begin{array}{l} (\mathbf{a}^i)^T \mathbf{x} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_0 = 1 \\ \mathbf{x} \text{ は整数ベクトル} \end{array} \right. \right\}$$

ここでは、後々のため不等式制約は斉次化し  $x_0 = 1$  という制約を加えた。単純に線形緩和することで得られる多面体は

$$L(P) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{1+n} \left| \begin{array}{l} (\mathbf{a}^i)^T \mathbf{x} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_0 = 1 \end{array} \right. \right\}$$

である。一方、次のように定義される行列  $A^{ij}$

$$\begin{aligned} A^{ij} &= \frac{\mathbf{a}^i (\mathbf{a}^j)^T + \mathbf{a}^j (\mathbf{a}^i)^T}{2} \\ A^{00} &= \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を用いて定義される半正定値行列の集合  $\mathcal{S}$  を考える。

$$\mathcal{S} = \left\{ X \succeq 0 \left| \begin{array}{l} A^{ij} \bullet X \geq 0 \quad (0 \leq i < j \leq m) \\ A^{00} \bullet X = 1 \end{array} \right. \right\}$$

このとき、次のような包含関係が成り立つ。

$$P \subseteq \{X_{\cdot 0} | X \in \mathcal{S}\} \subseteq L(P)$$

ただし  $X_{\cdot 0}$  は  $X$  の第 0 列を表す。すなわち、半正定値行列を用いた方がより良い緩和問題が作れる。

この半正定値計画問題を用いて組合せ問題が効率良く解けた例として有名なものに、パーフェクトグラフの最大安定集合問題がある。一般のグラフに対して、その最大安定集合を求める問題は NP 困難であることが知られているが、パーフェクトグラフでは最大安定集合が多項式時間で求まるという結果である ([15] 参照)。また最近の結果としてグラフの最大カット問題に対する Goemans-Williamson の近似解法がある [14]。  $G = (V, E)$  をグラフとしたとき、 $V$  の分割



$(V^1, V^2)$  をカットという。与えられた辺の重みベクトル  $w \in \mathfrak{R}^E$  に対して、カット  $(V^1, V^2)$  の重みを  $\sum\{w_e \mid e = (i, j), i \in V^1, j \in V^2\}$  と定める。最大カット問題は重み最大のカットを求める問題である。最大カット問題はNP困難な問題として知られているが、Goemans と Williamson は半正定値計画問題とそれを解く多項式時間解法を用いて、近似比が

$$0.87 \leq \frac{\text{近似解法で求まる解の値}}{\text{最大カットの重み}}$$

となる多項式時間近似解法を提案した。

元々の組合せ最適化問題（あるいは整数計画問題）から得られる半正定値計画問題は、次元がかなり大きくなり制約の数も増えるという問題点もあるが、線形緩和より良い緩和が得られる利点があり、組合せ最適化問題を解くための有望なアプローチの一つと思われる。

## 参考文献

- [1] Alizadeh, W.F. (1995), "Interior Point Methods in Semidefinite Programming with Applications to Combinatorial Optimization," *SIAM J. on Optimization*, **5**, 13-51.
- [2] Bachem, A. and Kern, W. (1991), *Linear Programming Duality - An Introduction to Oriented Matroids*, Springer-Verlag.
- [3] Björner, A., Las Vergnas, M., Sturmfels, B., White, N. and Ziegler, G. (1993), *Oriented Matroids*, Cambridge University Press.
- [4] Bland, R. G. (1977), "A combinatorial abstraction of linear programming," *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B*, **23**, 33-57.
- [5] Bland, R. G. (1977), "New finite pivot rules for the simplex method," *Mathematics of Operations Research*, **2**, 103-107.
- [6] Bland, R. G. and Las Vergnas, M. (1978), "Orientability of matroids," *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B*, **24**, 94-123.
- [7] Bland, R. G. and Las Vergnas, M. (1979), "Minty colorings and orientations of matroids," *Annals of the New York Academy of Sciences*, **319**, 86-92.
- [8] Chvátal, V. (1983), *Linear Programming*, W. H. Freeman and Company. (あるいは、阪田省二郎, 藤野和建, 田口東 (訳), 線形計画法 (上下巻), 啓学出版 (1986, 1988).)
- [9] Dantzig, G.B. (1963), *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press. (あるいは、小山昭雄 (訳), 線形計画法とその周辺, ホルト・サウンダース (1983).)
- [10] Dress, A. (1986), "Chirotopes and oriented matroids," *Bayreuther Mathematische Schriften*, **21**, 14-68.
- [11] Folkman, J. and Lawrence, J. (1978), "Oriented matroids," *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B*, **25**, 199-236.
- [12] Fukuda, K. (1982), "Oriented Matroid Programming," Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Waterloo.
- [13] 福田公明, 計画数学講義ノート, 東京工業大学 情報科学科.
- [14] Goemans, M.X. and Williamson, D.P., "Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming," (a preliminary version

- appeared in the Proceedings of the 26th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Montréal, 422–431, 1994).
- [15] Grötschel, M., Lovász, L. and Schrijver, A. (1988) *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag.
  - [16] Handa, K. (1990), “A characterization of oriented matroids in terms of topes,” *European Journal of Combinatorics*, **11**, 41–45.
  - [17] 今井浩 (1992), “線形計画問題に対する計算幾何的アプローチ”, 離散構造とアルゴリズム II (藤重悟編), 近代科学社, 1–46.
  - [18] 伊理正夫 (1986), 線形計画法, 共立出版.
  - [19] König, D. (1931), “Graphok és matrixok (Hungarian) [Graphs and matrices],” *Matematikai és Fizikai Lapok*, **38**, 116–119.
  - [20] 今野浩 (1987), 線形計画法, 日科技連.
  - [21] Lawrence, J. (1975), “Oriented Matroids,” Ph.D. Thesis, University of Washington, Seattle.
  - [22] Mandel, A. (1982), “Topology of Oriented Matroids,” Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Waterloo.
  - [23] Minty, G. J. (1966), “On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and network programming,” *Journal of Mathematical and Mechanics*, **15**, 485–520.
  - [24] Nemhauser, G.L., Rinnooy Kan, A.H.G. and Todd, M.J., eds, (1991), *Optimization*, North-Holland.
  - [25] Padberg, M.W. and Rinaldi, G. (1991), “A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems,” *SIAM Review*, **33**, 60–100.
  - [26] Rockafellar, R. T. (1969), “The elementary vectors of a subspace of  $R^n$ ,” in *Combinatorial Mathematics and Its Applications, Proc. of the Chapel Hill Conf.*, (Bose, R. C. and Dowling, T. A., eds.), Chapel Hill, University of North Carolina Press, 104–127.
  - [27] Schrijver, A. (1986), *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley and Sons.
  - [28] Stoer, J. and Witzgall, C. (1970), *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I*, Springer-Verlag.
  - [29] 田村明久 (1995), “線形計画法と有向マトロイド計画法”, 離散構造とアルゴリズム IV (室田一雄編), 近代科学社.